数楽ミニサロン「過去から学ぶシリーズ」('07.3『数学教室』)

タ イ ル で 広 が る 代 数 の 世 界

― ベキタイル・キャンセルタイル・そして面積シェーマ ―

山岸　昭則（石川）

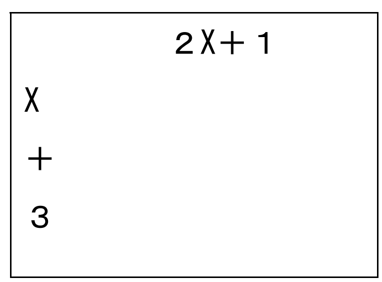
1) 文字・式の前で立ち竦む高校生を解放したベキタイル

周辺地区の実業系高校の数学教師たちが見守る中、私の授業は始まった。

教　師　今日は因数分解ということを勉強しよう。

まず、因数分解ということを、以前に勉強した展開に遡って考えよう。いま、このワラ半紙の２辺の長さを $2X+1$ と $X+3$ とすると、

と手に持ったワラ半紙の２辺にマジックで粗っぽく印を付け

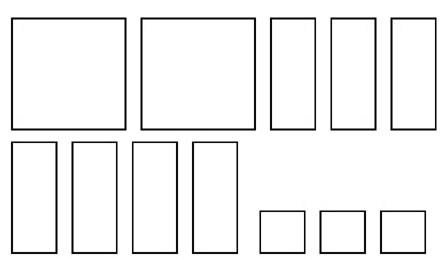


この面積は、２辺の積 $(2X+1)(X+3)$ とも、計算結果の　多項式　$2X^2+7X+3$　とも表わされる。つまり

$$(2X+1)(X+3)=2X^2+7X+3$$

という等式が成り立つ。この右辺から左辺を導くことを「展開」と言ったのだった。いま、このワラ半紙の線でハサミを入れて切り離すと、

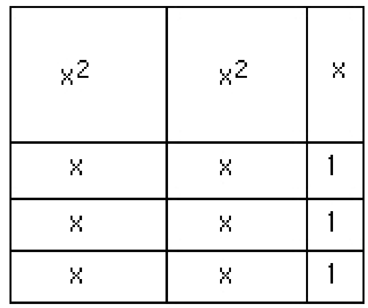
とハサミを入れ右図のようにバラバラにする。



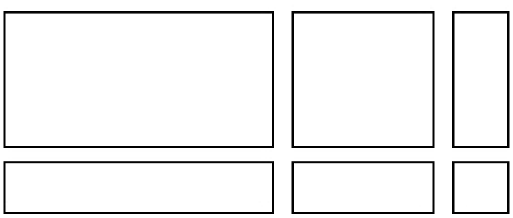
この方が、$(2X+1)(X+3)$ が $2X^2+7X+3$ に「展開」されたという感じが分かるかも知れんね。次に、このバラバラになった「もの」を「合せて」長方形を作って「できた」面積を２辺の

積で表わすと、
と私は生徒の机上にあるものよりも少し大き目の黒板に張り付けられるタイル状の「モノ」で次図のように長方形を完成しながら、「展開の逆の操作をする」と実演し、「因数分解」が展開とは逆の

$$2X^2+7X+3=(2X+1)(X+3)$$



という式変形を指して言う、と解説し
多項式 $2X^2+9X+4$ の因数分解を出題する。
この因数分解の定義を受けて、数人一組で机上に積んである大小５種類の正方形と長方形のタイル状の「モノ」（下図参照）から黒板の式 $2X^2+9X+4$ を見ながら大小の正方形や長方形の「モノ」に翻訳するかのように取りだして長方形づくりに取り組む。



（厚さ３㎜ 裏は色違いでマイナスとする）

仮のタイル名	寸法(cm)	枚数
面積１のタイル	2.5×2.5	20
面積 x の長方形タイル	2.5×4.5	12
面積 x^2 の正方形タイル	2.5×8.1	8
面積 x^2 の長方形タイル	4.5×4.5	6
面積 x^3 の長方形タイル	4.5×8.1	6

このタイル状のものは、中学・高校の代数計算に頻繁に使われる

数 X^n （ｎ＝１のとき数Ｘ、ｎ＝２のとき数 X^2、以下同様）

のＸの累乗（冪）を上図のように「モノ」化し「ベキタイル」と命名した。
工作紙でこれを作ることを通し、例えば、

$X^1 \times X^1 = X^2$ や $X^3 \times X^2 = X^5$ など、一般に $X^m \times X^n = X^{m+n}$

と表わされるベキ構造を理解し、同時に、$X^3 \times X^2 = X^6$ という躓きをはじめ、$5X-X=5$、$X^2=2X$、$X^2+X^3=X^5$ などの文字・式計算の間違いを容易に気づかせる。また、冒頭の２次式 $2X^2+7X+3$ のタイル抽出のようにそれを

複数個「組合す」ことによって、多項式（整式ともいう）がベキタイルの面積という具体量で表現でき、これをくっつけたり、離したりすることによって式の加減がタイルの面積の加減としてイメージされる。「１」を「y^2」、小さい長方形を「ｘ・ｙ」としてもよい。こうして「ベキタイル操作」は「乗除と加減の絡まりをその本質とする多元（高次）多項式の計算」と対応し、中・高校生の学ぶ数学とかかわり深い高次式（１次式を線形というのに対して非線形ともいう）の計算ツールのような役割を果たすことになったのであった。

　訪問者の前で教え合い、学び合いつぎつぎと「ベキタイル操作」と対応させながら２次式を因数分解する生徒たちには出来ない者は一人としていない。
参観した教師たちは公開授業後の反省会で異口同音に「私の授業では少なくとも１時間は費やしてしまう生徒を悩ます２次式のタスキ掛けによる因数分解を２０分弱で殆どの生徒を出来るようにした“ベキタイル”には驚いた」と。

　具体的イメ―ジが思い浮かばない文字や式、意味も解らないその計算や公式とその羅列。これが中・高校生ばかりか、人を数学の前で立ち竦ませる。人を悩ませ、数学の前で立ち竦ませる文字・式とその計算に具体的イメ―ジを与える「数学的構造の空間的表現」を第一の目的に、いわゆる「一斉授業」をこれを媒介に交歓と呼ぶに相応しい「教え＝学びの場」にする一方、個々人には、身近で作ったり、容易くやってみたり、もて遊ぶなど直観的な実験的・発見的模索によってリアリティを伴う理解ができ、こうした「教え＝学び」を経て数学の実在の体感と習得にいたる数学教育を可能にすることを目指し１９７３年に開発した教育モデルであった。この私の投じた一石は、「感激だ！計算は何でも解けるようになった。しかも楽しい」、見知らぬ他郷の教師の実践の試みでも「中学生までわからないまま進み、数学というものが嫌いだった。だが、高校に入って、ベキタイルを使いはじめてから数学が分かりはじめた。また数学が楽しくなった。中学校からすれば数学嫌いも少なくなるのでは」（当時の日教組全国教研報告・宮崎高）などと高校生に受入れられ、現在では教科書にも入り、インターネットで“Algebra Tiles”と検索すれば教師教育用や商用の外国サイトをたくさん見ることができる。

　しかし、そこにあるのは私にとって不本意な形である。提案した負タイルと３

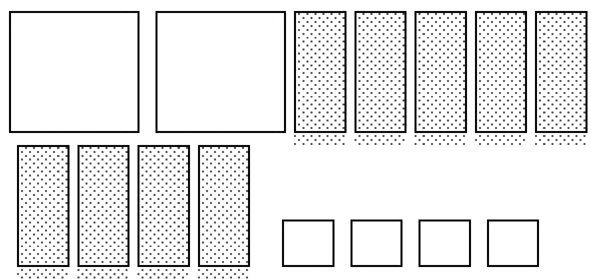
次タイルが手で分析・総合できるまでになっていないばかりか、モノの操作による「楽しさ」の強調に止まり、文字係数の代数式の計算（アルゴリズム）への発展は視野にないからである。

２）「－１」タイルとキャンセルタイル

～量（面積）への依存とそこからの離陸～

　ベキタイルが、高次式の本格的な計算ツールとなるためには、係数に負の数を含む式　$2X^2-9X+4$、$3X^2+5X-2$　や３次式　$2X^3+3X^2-1$等も縦横に扱えなければならない。

最初の式　$2X^2-9X+4$　の場合は、必要に応じて、どちらかの一辺をマイナスに読む、正数×負数＝負数という演算構造を具象化した一辺が「負のベキタイル」を導入すると、代数和$2X^2+(-9)X+4$として考えられ、その因数分解はこの代数和$2X^2+(-9)X+4$のタイルが「作る」面積であると考えても変わりなく、黒板でいとも容易く解いてしまう（省略）。



しかし、プラスとマイナスの二つの符号を扱うこの段階になると、「面積」とう具体量でとらえてきたベキタイル、したがって、それで作られる長方形も面積量で統一的にとらえてきたことは一変する。２次式

　　X^2+5X-6　や　$4X^2+X-3$

でも長方形の面積という具体量で考えるということはもはや破綻するからである。式　X^2+5X-6では、

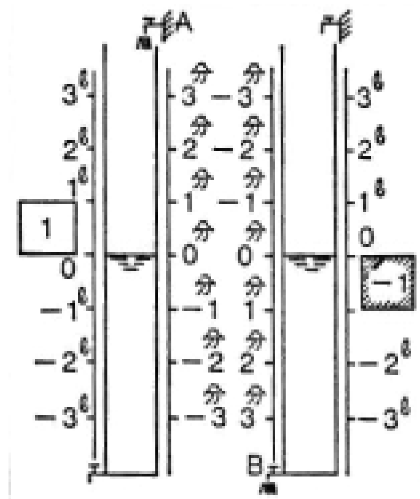
x^2	x	x	x
x	-1	-1	-1
x	-1	-1	-1

取り出したタイルで右図のように式$2X^2-9X+4$の場合と同様に、手持ちのタイルで長方形を「作る」ことはできるが、長方形の面積を２辺の積$(X+3)(X+2)$で表わしても$3\times2=-6$は成り立っていないから「正しくない」のである。

このことをもっとはっきりさせてくれるのが式　４X^2＋Ｘ－３　である。取り出したタイルを全部使っても長方形を「作る」ことはできないからである。

　これをタイルで遊ぶことの限界とし、東書の教科書のように負のベキタイルを「使用しない」方向を採るかそれとも数学史上の数概念の拡張と同じように積極的に「拡張」する方向を採るかである。数学史上では、数とは単位数１の集まった「もの」とするピタゴラス学派の数の定義に納まりきらない数を存在しないとしないで無理数とし、３次方程式に虚数解が得られたとき、解を存在しないとしないで虚数を導入することによって解の存在する方向を採ったのであった。

ベキタイルの代数はベキタイルの使用に先立つ「負のベキタイル」つくりによる正負の数の計算規則「負数×負数＝正数」や「正数×負数＝負数」、代数和から「代数始め」と考え本稿冒頭の授業が最初ではない。



　図の水槽で基準の時間０分のときの水量を０ℓとする。Ａ栓を開けば流量１ℓ /分で水が入り、Ｂ栓を開けば流量－１ ℓ /分で水が出るとする。０分のとき０ℓの状態にあってＡ栓を開いた場合の１分後の水量は図左のように

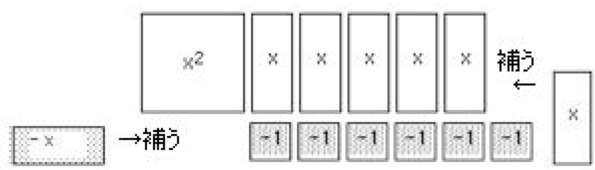
（１ℓ /分）×（１分）＝１ℓ

の水が加わる。同様にＢ栓を開いた場合１分後の水量は図右のように「－１」水量が減る。この水量の増量を正、減量を負の表裏の色別で表「１」、裏「－１」（数学でいう絶対値１）の「キャンセルタイル」を創る。これを使って「０分のとき０ℓの状態にあってＢ栓を開いた場合（－１ℓ /分）の３分前（－３分）の水量は？」と問いかけると、生徒は「１」タイル３枚を増やす。こうして負の量と負の量の積が正の量ということが具体量で獲得されることになる。計算は（－１ℓ /分）×（－３分）＝３ℓ　である。

この表「１」、裏「－１」、絶対値「１」の「タイル」の導入で、ベキタイルは一面が数X^n 、他面は数(−1) X^nの絶対値「X^n」というベキ構造と、正数×負数＝負数という演算構造を体現し、必要に応じてどちらかの一辺をマイナスに読む

というベキ構造と正負の数の演算構造を内包した空間表現としての新たな教育モデルとなる。これはタイル状ではあっても、もはや具体量「面積」とは無縁な代数操作にイメージを与える意味でシンボライズされた「半具体物」としての教育モデル「キャンセルタイル」である。

この負タイルを用いて式Ｘ^2＋５Ｘ－６を因数分解するプロセスは次のようなタイル操作のステップを踏んで長方形を完成させることになる。



ステップ１）長方形を作ろうとするときのタイル操作は大きいタイルと小さいタイルだけで長方形ができる。

ステップ２）負数×正数＝負数という演算を意識的に適用する

ステップ３）Ｘタイルと－Ｘタイルを各１個補う（キャンセルすると零）

このタイル操作における三つのステップは、つぎの数学の計算規則に基づく判断による。第一は、長方形ができるか否かは２乗の項の係数と定数項の素因数分解であり、第二、第三は正負の数の計算規則と合致しているか否かである。

３）代数計算の組織化とアルゴリズムが主題

～「ベキタイル」駆使から「面積シェーマ」駆使へ～

このようにベキ構造や正負の計算規則を体現したキャンセル（ベキ）タイルによってその操作を介して文字式の計算の習得と公式の定着が図られる一方、その操作の合理性も数学の論理に則って行わなければならないという相補性が「教え＝学び」に効力を発揮する。例えば、３次式　２Ｘ^3＋３Ｘ^2－１　の因数分解の場合、上記タイル操作の３ステップを適用することには変わりないが、２次式との違いは、二乗のベキタイルの使用において正方形と長方形の二種類を適宜使い分ける必要があること。このことから「無理に当て嵌めようとする」ところがあるから「ベキタイル使用は正方形を表す２次式まで」と考えがち。しかし、ある程度の一般的な問題を同じやり方で解くという「アルゴリズム」を教えることが

大切な代数教育であることを考えれば、最高次の項の係数と定数項を分解していくつかの値を代入すれば１次の因数が見つけられる（クロネッカーの方法）ことを高校生に獲得させるには少なくとも３次式の因数分解まで必要である。私が３次と２種の２次タイル、そしてキャンセルタイルまで拡張した理由であった。

正負と３次のベキタイルによる代数教材を編めば中学段階でも高次多項式の代数計算が可能になるのであって、負や３次のベキタイルを使用しないというのは後退であるというのが私の主張。このことは、算法なり公式の由来・アルゴリズムを課題にベキタイルの利用を見ればもっと明らかになる。

現代数学では文字係数の式計算を厭わず行い、公式を導き、縦横に使うことが必要であるが、数学を苦手とし文字・式の前で立ち竦む高校生たちにそれをできるようにするために開発したのがベキタイルであった。その目的を実現できなければ私にとっては意味がない。

$$
\begin{aligned}
y &= ax^2 + bx + c \quad \text{（一般形）}\\
&= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c\\
&= a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right\} + c\\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}\\
&\qquad \text{（標準形）}
\end{aligned}
$$

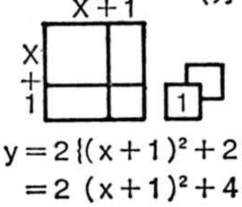
例えば、教科書の右の2次関数の変形

$y = ax^2+bx+c \ \rightarrow \ y = a(x-p)^2+q$

プロセスに現れる高校生たちの躓きや疑問のよく知られているものは、$(b/2a)^2$ はどこから現れなぜ必要なのか？また、$+(b/2a)^2-(b/2a)^2$という「キャンセル０」になる計算はなぜ必要なのか？

$y = 2x^2+4x+6$
$\ \ = 2\,(x^2+2x+3)$

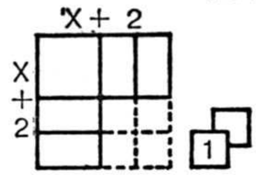
（カッコ内）



$y = 2\{(x+1)^2+2\}$
$\ \ = 2\,(x+1)^2+4$

$y = 2x^2+8x+12$
$\ \ = 2\,(x^2+4x+6)$

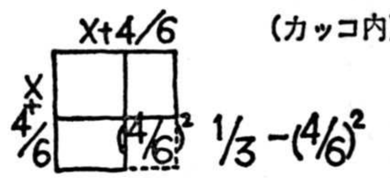
（カッコ内）



$y = 2\{(x+2)^2+2\}$
$\ \ = 2\,(x+2)^2+4$

$y = 3x^2+4x+1$
$\ \ = 3\,(x^2+4/3x+1/3)$

（カッコ内）

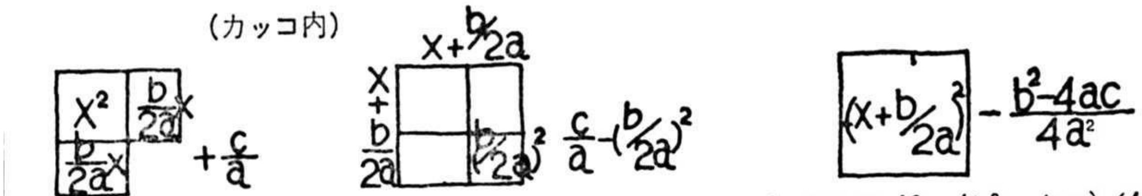


$y = 3\{(x+4/6)^2-4/36\}$
$\ \ = 3\,(x+4/6)^2-4/12$
$\ \ = 3\,(x+2/3)^2-1/3$

整係数の代数計算とベキタイルによる正方形づくりを対応づけ、整係数でない

上図右になると「正方形の完成」のために$(b/2a)^2$に相当する計算が必要になることが理解される。

$$y = ax^2 + bx + c$$
$$= a\ (x^2 + b/ax + c/a)$$



$$y = a(x + b/2a)^2 - (b^2 - 4ac)/4a$$

この後の上記文字係数の式変形と面積シェーマの対応は簡単にやってのける。

　なお、蛇足ながら２次方程式の解の公式は、y=0として「正方形の完成」を行い一辺の長さを求めることで出て来る。

４）差別・選別体制に抗しフレンドリーな数学教育づくりを

　経験的源泉から不必要なものを捨象する抽象、それにさらに行う２代、３代の数学的抽象。ここに特徴のある数学化・一般化が、経験的であれ数学的であれ対象から具体的意味の一部を失わせ数や文字とその計算から具体的イメ―ジを奪い人を数学の前で立ち竦ませてきた。数学教育もまたこの影響から免れることができず、あたかも、学ぶ者すべてに等しく数学を獲得させることを拒むかのように証明に煩わせ問題を解くことに汲々とさせ、数学に怯むことを増幅・挫折させ数学オンチを拡大生産してきた。これはけっして個人的な問題ではなく、教育機会や教育達成の不平等を担う学校装置における最も教育効果あるものとして機能するきわめて社会的な問題としてある。したがって、この温床にメスを入れることは、数学オンチを云々することにとどまらず、数学嫌いや、理科離れ、果ては思考することすら疎む学びからの逃避等々、教育と裏腹の現象を生み出している教育の社会学もしくは教育社会学的な再生産論論議にまでかかわる問題である。

　習熟度別という美名のもと差別・選別を進めている。質の高い数学をすべての子どもに保障するフレンドリーな数学教育づくりの一助とならんことを願って改めて「ベキタイルの代数」を紹介した。　（福井大講）